Zkouška NMFM310 (21.5.2015)

Početní část

Úloha 1 (7,5 bodu):

Uvažujte Markovský řetězec $\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ s množinou stavů $S = \{0, 1\}$, s počátečním rozdělením $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ a maticí pravděpodobností přechodu

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Berte jako fakt, že platí

$$P^n = \frac{4}{5}\left[\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} + \left(-\frac{1}{4}\right)^n \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\right].$$

Spočítejte:

a) absolutní pravděpodobnosti $p(n) = (p_i(n))_{i\in S}$, tedy rozdělení náhodné veličiny X_n,

b) $\lim_{n\to\infty} p_i(n)$, $\lim_{n\to\infty} p_{i,j}^{(n)}$, $i, j = 0, 1$,

c) stacionární rozdělení řetězce,

d) $\mathbb{E}X_n$ a $\mathrm{var}(X_n)$, pokud byl řetězec v čase 0 ve stavu 1.

Úloha 2 (6,5 bodu):

a) Pomocí Yule-Walkerových rovnic spočítejte autokorelační funkci a rozptyl AR(2) procesu zadaného rovnicí

$$X_t - \frac{1}{4}X_{t-2} = \epsilon_t,\ t \in \mathbb{Z},$$

kde $\{\epsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$ je bílý šum s nulovou střední hodnotou a jednotkovým rozptylem. Rozptyl $R(0)$ nemusíte dopočítávat numericky, stačí napsat, jak by se spočítal.

b) Pokud víte, že $\{Y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ je slabě stacionární posloupnost a máte k dispozici pozorování $X_1, \ldots, X_n$, jak odhadnete střední hodnotu μ a hodnoty autokovarianční funkce $R(k), k \in \mathbb{N}_0$?

Úloha 3 (6 bodů):

Instituto Cervantes pořádá semestrální přípravné kurzy k mezinárodní zkoušce ze španělštiny DELE. Historické statistiky říkají, že průměrně 90% studentů se rozhodne skládat zkoušku. 10% se rozhodne zkoušku ještě neskládat, ale kurz si ještě jednou zopakovat (bez ohledu na to, zda studují poprvé nebo ne). Úspěšnost u zkoušky je různá u účastníků pouze jednoho kurzu a u účastníků více přípravných kurzů. Z účastníků jen jednoho kurzu jich zkoušku úspěšně složí průměrně 70%, u účastníků více než jednoho kurzu je úspěšnost 80%. Pokud student u zkoušky neuspěje, dalších pokusů zanechává. Znáte-li počty nově přihlášených studentů v jednotlivých semestrech (student přihlášený v semestru t studuje v semestru $t + 1$ a na jeho konci případně skládá zkoušku), jaké počty úspěšně složených zkoušek DELE lze v daném semestru očekávat?

a) Sestavte soustavu stavových rovnic popisující výše uvedený problém.

b) Určete přenosovou funkci této lineární soustavy.

c) Je tato soustava stabilní?

Teoretická část

Úloha 1 (7 bodů):

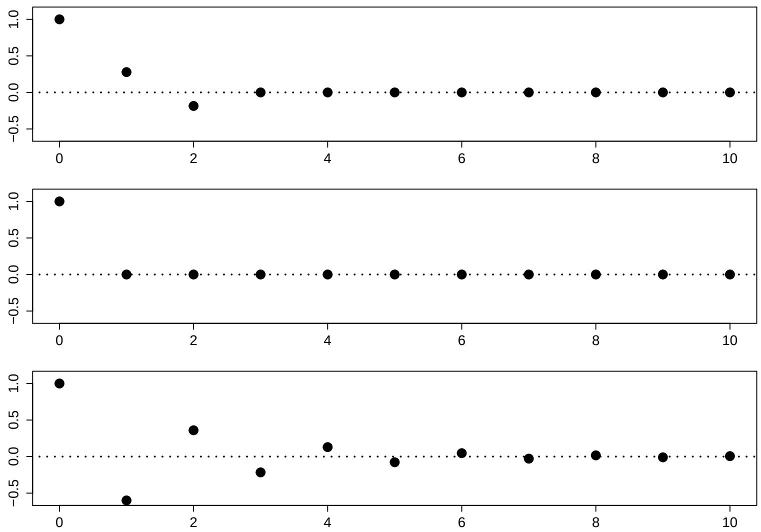
a) Definujte bílý šum $\{\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$ (ne striktní, ale slabou verzi).

b) Co musí splňovat posloupnost $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$, aby byla silně stacionární?

c) Co musí splňovat posloupnost $\{Y_t, t \in \mathbb{Z}\}$, aby byla slabě stacionární?

d) Spočítejte autokovarianční funkci MA(1) procesu zadaného rovnicí $U_t = \varepsilon_t + 0{,}6\varepsilon_{t-1}$, kde $\{\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$ je bílý šum s rozptylem $\sigma^2 > 0$.

e) Na obrázku jsou grafy autokorelačních funkcí tří náhodných posloupností. Jednu tvoří bílý šum, jedna odpovídá modelu MA(2) a jedna modelu AR(1). Přiřaďte, který graf odpovídá kterému modelu a **každé** přiřazení zdůvodněte. Nestačí říct, že tento graf zbyl na tento model!



Úloha 2 (9 bodů):

a) Definujte: přechodný stav markovského řetězce,
trvalý nenulový stav markovského řetězce,
aperiodický stav markovského řetězce.

b) Máte markovský řetězec se stavy $\{a, b, c\}$. Z vnějších zdrojů víte, že doba prvního návratu do stavu a, za podmínky, že $X_0 = a$, má rovnoměrné rozdělení na množině $\{1, 2, 3\}$. Klasifikujte stav a a zdůvodněte.

c) Dokažte, že pokud existuje limitní rozdělení markovského řetězce, je zároveň jeho stacionárním rozdělením.

Úloha 3 (4 body):

a) Definujte Poissonův proces.

b) Formulujte větu o rozdělení časů mezi událostmi Poissonova procesu.

c) Uvažujme Poissonův proces s intenzitou $\lambda = 7$. Jak dlouho budeme průměrně čekat na první událost tohoto procesu? Zdůvodněte.